Références :
Un max de maths, Maxime Zavidovique

Rappel (Théorème d'inversion locale)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $Df(a)$ est inversible, ie $\det(Df(a)) \neq 0$.
Alors il existe un ouvert $V \subset U$ qui contient a et un ouvert W qui contient $f(a)$ tel que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.

Théo. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Démonstration.

Etape 1 : Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrons que $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$.
Comme $\mathbb{C}[C]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathbb{C}[C]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi

$$\exp(C) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} C^k$$

est une limite de polynômes en C donc d'éléments de $\mathbb{C}[C]$. On en déduit que $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$.

Etape 2 : Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrons que $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$.
Tout d'abord, pour $M \in GL_n(\mathbb{C})$, on sait que M^{-1} est un polynôme en M.

> En effet, par Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$.
> Or $\chi_M(X) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + a_1 M + (-1)^n \det(M) I_n$.
> Ainsi, $(-1)^{n+1}\det(M) I_n = Q(M)M$ ie
>
> $$I_n = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{\det(M)} Q(M)}_{\text{polynôme en } M} M.$$

Soit $M \in \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$ alors M^{-1} est un polynôme en M donc en C.
Ainsi, $M^{-1} \in \mathbb{C}[C]$. On a donc que $\mathbb{C}[C]^\times$. On obtient donc le résultat.

Etape 3 : Montrons que exp réalisé un morphisme du groupe additif $\mathbb{C}[C]$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}[C]^\times$.
L'ensemble $\mathbb{C}[C]$ est une sous-algèbre commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On peut donc appliquer la formule

$$\forall (A, B) \in \mathbb{C}[C]^2, \exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

On sait, par l'étape 1, que $\exp(\mathbb{C}[C]) \subset \mathbb{C}[C]$.
Comme exp est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$, sa restriction à $\mathbb{C}[C]$ est bien un morphisme de groupes qui, d'après l'étape 2, prend ses valeurs dans $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

Etape 4 : Montrons que $\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$.
$\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]$ car c'est l'intersection de $\mathbb{C}[C]$ avec l'ouvert $\det^{-1}(\mathbb{C}^*) = GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour montrer, $\mathbb{C}[C]^\times$ est connexe, on va montrer qu'il est connexe par arcs.

> En effet, un ouvert U d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.
>
> - On suppose connu le fait que [0,1] est connexe.
> Supposons que U est connexe par arcs.
> Soit $f : U \to \{0, 1\}$ continue .
> Montrons que f est constante.
> Soit $x, y \in U$.
> Alors, il existe $\gamma : [0, 1] \to U$ continue tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
> Ainsi, $f(x) = f \circ \gamma(0)$ et $f(y) = f \circ \gamma(1)$.
> Or, $f \circ \gamma : [0, 1] \to \{0, 1\}$ et [0,1] est connexe.
> Donc $f \circ \gamma$ est constante. Ainsi, pour tout $x, y \in U$, on a $f(x) = f(y)$ et donc f est constante.

- Supposons que U est connexe.
  On va faire un raisonnement par connexité.
  Soit $x_0 \in U$.
  Posons

$$C = \{x \in U : \exists \gamma : [0,1] \to U \text{ continue} \\ \text{tel que } \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma(1) = x\}.$$

  Montrons que C est ouvert.
  Soit $x \in C$.
  Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.
  Soit $y \in B(x, \varepsilon)$.
  Posons

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : [0,1] & \to & U \\ t & \mapsto & tx + (1-t)y \end{array}$$

  L'image de ce chemin est dans $B(x, \varepsilon)$ qui est convexe et donc c'est bien inclus dans U.
  En prenant $\gamma_1 = \gamma * \gamma_0$, on obtient bien le résultat.
  Montrons que C est fermé.
  Soit (x_n) une suite d'éléments de C qui converge vers $x \in U$.
  Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.
  Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon)$ et $x_{n_0 - 1} \notin B(x, \varepsilon)$.
  Il suffit alors de prendre le chemin qui relie x_0 à x_{n_0} puis on fait le même raisonnement que précédemment pour relier x_{n_0} à x.

Soit $M, N \in \mathbb{C}[C]^\times$.
On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[C]$. On doit trouver un chemin de cette forme mais qui soit aussi dans $GL_n(\mathbb{C})$.

On remarque que la fonction $P : z \mapsto \det(zM + (1-z)N)$ est polynômiale en z.
Comme c'est un polynôme non nul (car $P(0) = \det(N)$ et que N est inversible), il ne s'annule que sur un nombre fini de points.
Il est donc aisé de construire une fonction $t \mapsto z(t)$ qui évite ces points tel que $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$ (car $P(0)$ et $P(1)$ sont non nuls car M et N sont inversibles).
En posant $\gamma(t) = z(t)M + (1 - z(t))N$, on obtient bien le résultat.

Etape 5 : Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[C]^\times$.
Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert.
On sait que $D_{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}} \exp = I_n$ Ainsi, $\det(D_{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}}) \neq 0$. On sait aussi que exp est $\mathcal{C}^1$. On considère $\exp : \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]$.
Par le théorème d'inversion locale, il existe U contenant $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ dans $\mathbb{C}[C]$ et V contenant I_n dans $\mathbb{C}[C]$ tels que $\exp : U \to V$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
En particulier, $\exp(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de I_n.
Soit $A \in \mathbb{C}[C]$. Comme $\exp_{|\mathbb{C}[C]}$ est un morphisme de groupes.

$$\exp(A + U) = \exp(A)\exp(U) = \exp(A)V$$

Comme $\exp(A)$ est inversible, on a

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}[C] & \to & \mathbb{C}[C] \\ M & \mapsto & \exp(A)^{-1}M \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
Ainsi, $\exp(A)V = f^{-1}(V)$ est ouvert.
Comme $I_n \in V$, alors $\exp(A) \in \exp(A)V$.
Ainsi, $\exp(A)V$ est un voisinage ouvert de $\exp(A)$ dans $\mathbb{C}[C]$ inclus dans $\exp(\mathbb{C}[C])$.
Par conséquent, $\exp(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de chacun de ses points. C'est donc un ouvert.

Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé.

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G.
On sait que l'ensemble des classes à gauche forment une partition de G. Ainsi,

$$G = \bigcup_{a \in G} aH.$$

Ainsi,

$$G \backslash H = \bigcup_{\substack{a \in G \\ a \notin H}} aH = \bigcup_{a \in G \backslash H} aH.$$

Ainsi,

$$\mathbb{C}[C]^{\times} \backslash \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^{\times} \backslash \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C]).$$

Ainsi, $\mathbb{C}[C]^{\times} \backslash \exp(\mathbb{C}[C])$ est une réunion d'ouverts donc c'est un ouvert. Par conséquent, $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un fermé.

Etape 6 : Montrons que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.
Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé, ouvert et non vide (puisqu'il contient par exemple $\exp(C)$). On a donc $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^{\times}$.
Soit $C \in GL_n(\mathbb{C})$.
On a clairement que $C \in \mathbb{C}[C]$. Ainsi, $C \in \mathbb{C}[C]^{\times}$.
Par ce qui précède, $C \in \exp(\mathbb{C}[C])$. En particulier, $C \in \mathrm{Im}(\exp)$.

$\square$

Leçons possibles : 156 - 204 - 214